Proyecto MaTEX

Continuidad

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- **Tabla de Contenido**
- **Inicio Artículo**

D.L.:SA-1415-2004

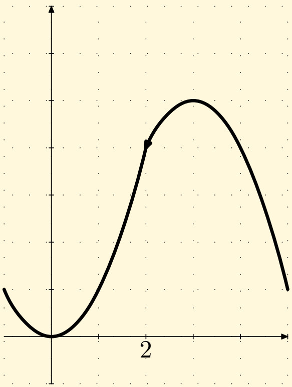
ISBN: 84-688-8267-4

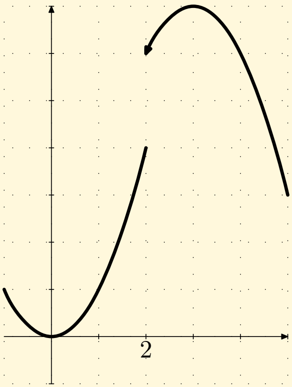
Tabla de Contenido

1. Continuidad

1.1. ¿Qué es una función continua?

Para una primera aproximación gráfica, si piensas en el grafo de una función, decimos que una función es continua cuando podemos recorrer el grafo de la función si tener que realizar ningún salto. Observa las figuras de abajo





La función de la izquierda no presenta ningún salto y decimos que es continua. La función de la derecha presenta un salto en el punto $x = 2$. Decimos que no es continua en este punto.

1.2. Definición de continuidad

Definición 1.1 *Sea f una función y $a \in Dom(f)$ decimos que f es continua en $x = a$ cuando*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{1}$$

La continuidad de f en $x = a$ implica que se cumplan las condiciones:

1. La función está definida en $x = a$, es decir exista $f(a)$.
2. Exista el límite de f en $x = a$.
3. Los dos valores anteriores coincidan.

Ejemplo 1.1. La función $f(x) = 3$ es continua en todo punto $a \in R$

Solución: En efecto, para todo punto $a \in R$ vemos que se verifica la definición, pues

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 3$$

$\square$

Ejemplo 1.2. La función $f(x) = C$ donde C es cualquier constante, es continua en todo punto $a \in R$

Solución: En efecto, para todo punto $a \in R$ vemos que se verifica la definición, pues

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = C$$

$\square$

Establecemos este resultado como

$$\boxed{\text{La función } f(x) = C \text{ es continua en todo } x \in R}$$

Ejemplo 1.3. La función $f(x) = x^2$ es continua en todo punto $a \in R$

Solución: En efecto, para todo punto $a \in R$ vemos que se verifica la definición, pues

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = f(a) = a^2$$

$\square$

Ejemplo 1.4. La función $f(x) = x^n$ con $n \in N$ es continua en todo punto $a \in R$

Solución: En efecto, para todo punto $a \in R$ vemos que se verifica la definición, pues

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^n = f(a) = a^n$$

$\square$

Establecemos este resultado como

$$\boxed{\text{La función } f(x) = x^n \text{ es continua en todo } a \in R}$$

1.3. Algebra de las funciones continuas

Sean f y g funciones continuas en un punto $a \in R$. Entonces

Algebra de funciones continuas	
Homogeneidad	$c \cdot f(x)$ con $c \in R$ es continua en $a \in R$
Suma	$f(x) + g(x)$ es continua en $a \in R$
Producto	$f(x) \cdot g(x)$ es continua en $a \in R$
Cociente	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $g(a) \neq 0$ es continua en $a \in R$

Ejemplo 1.5. Calcular el valor de k para que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} x + k & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Solución: Siendo

$$f(x) = \begin{cases} x + k & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

- $f(1) = 2$
- $\lim\limits_{x \to 1} x + k = 1 + k$

Para que sea continua, $1 + k = 2 \Longrightarrow \boxed{k = 1}$. □

Ejemplo 1.6. Calcular el valor de k para que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} x+k & x \neq 1 \\ 2-k & x = 1 \end{cases}$$

Solución: Siendo

$$f(x) = \begin{cases} x+k & x \neq 1 \\ 2-k & x = 1 \end{cases}$$

- $f(1) = 2-k$
- $\lim_{x \to 1} x + k = 1 + k$

Para que sea continua, $1 + k = 2 - k \Longrightarrow \boxed{k = \dfrac{1}{2}}$. □

Ejercicio 1. Calcular el valor de k para que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Calcular el valor de h para que exista el límite de la función en $x = -3$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+h & x < -3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} & x > -3 \end{cases}$$

2. Discontinuidad

Definición 2.1 *Decimos que una función es discontinua en el punto $x = a$ cuando no es continua en $x = a$.*

Se pueden presentar los siguientes casos cuando una función no es continua:

Tipos de Discontinuidad

- Evitable, cuando $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

  En este caso existe el límite pero el valor de la función $f(a)$ es distinto o no esta definido.

- Salto finito, cuando $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

  En este caso los límites laterales son finitos pero de distinto valor.

- Salto infinito, cuando algún límite lateral $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ es infinito

A continuación analizamos cada uno de los tipos de discontinuidad que hemos clasificado en el cuadro superior

2.1. Discontinuidad Evitable

Decimos que una función en el punto $x = a$ presenta una discontinuidad evitable cuando existe $\exists \lim_{x\to a} f(x) = L$ (finito) , pero no coincide con $f(a)$.

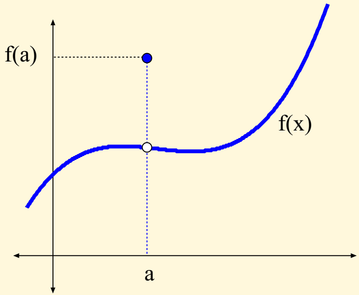
Se tiene que los límites laterales coinciden

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

pero

$$f(a) \neq L$$

$$\boxed{\exists \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)}$$



Ejemplo 2.1. Analizar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Solución: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ pero $f(1)$ no existe, en $x = 1$ presenta una discontinuidad evitable.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2\end{aligned}$$

□

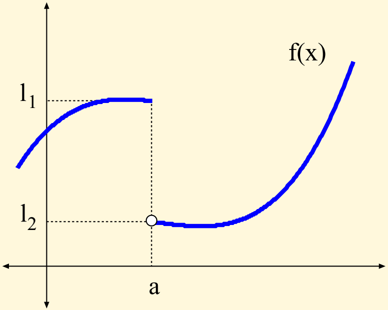
2.2. Discontinuidad de salto finito

Decimos que una función en el punto $x = a$ presenta una discontinuidad de salto finito cuando existe los límites laterales y son distintos.

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to a^-} f(x) & = & l_1 \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) & = & l_2\end{array}\right\} l_1 \neq l_2$$

El salto de la función viene dado por

$$\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)$$



Ejemplo 2.2. Analizar la continuidad de $f(x) = \left\{\begin{array}{cc} x+1 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & 0 < x\end{array}\right.$

Solución: En $x = 0$, $f(0) = 1$, pero los límites laterales

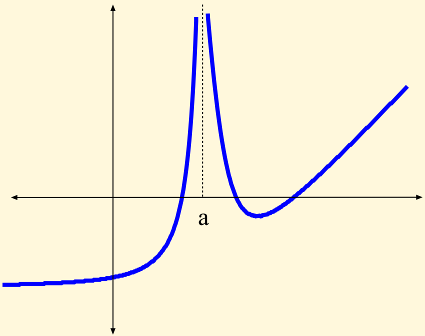
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 1 = -1\end{array}\right\} \Longrightarrow f(0^-) \neq f(0^+)$$

son distintos, luego en $x = 0$ hay una discontinuidad de salto finito. □

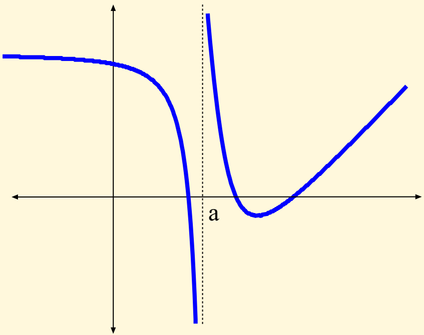
2.3. Discontinuidad de salto infinito

Decimos que una función en el punto $x = a$ presenta una discontinuidad de salto infinito cuando algún límite lateral de $f(x)$ en $x = a$ es infinito. En las figuras se muestran dos ejemplos de salto infinito en $x = a$.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$



Ejemplo 2.3. Hallar a para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ a\,x - 2 & 1 < x \end{cases}$$

Solución:
Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = 0 = f(1^+) = a - 2 \Longrightarrow \boxed{a = 2}$$

□

Ejemplo 2.4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & -1 < x \leq 1 \\ \ln x & 1 < x \end{cases}$$

a) Hallar a para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$

b) ¿Es continua en $x = 1$?

Solución:

a) Para que sea continua en $x = -1$

$$f(-1^-) = -2 + a = f(-1^+) = 1 \Longrightarrow \boxed{a = 3}$$

b) ¿Es continua en $x = 1$? No, pues $f(1^-) = 1 \neq f(1^+) = \ln 1 = 0$

□

Ejemplo 2.5. La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, ¿es continua en $x = 3$?

Solución: La función presenta en $x = 3$ una discontinuidad evitable, pues

- $f(3) = \dfrac{0}{0}$ no esta definido
- $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 6$

□

Ejercicio 3. Hallar a para que $f(x)$ sea una función continua en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{x+2} & x \leq 0 \\ x^2 + 2ax + a & x > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Dada la función $f(x) = x^2\, sen\, \dfrac{1}{x}$ hallar el valor que debe asignarse a $f(0)$ para que sea continua en R.

Ejercicio 5. Sea

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(1 + x)}{x^2 + ax + 2a}$$

una función que presenta una discontinuidad evitable en $x = -1$. Averiguar el valor del parámetro a y $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x)$.

3. Teoremas de Continuidad

3.1. Continuidad en un intervalo

Definición 3.1 *Decimos que f es continua en $[a, b]$ cuando es continua en todo punto $x \in (a, b)$ y además*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Ejemplo 3.1. La función $f(x)$ no es continua en el intervalo $[1, 3]$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 3 \\ x^2 - 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

Solución: En $x = 3$, $f(3) = 8$, pero el límite lateral

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x + 1 = 4$$

es distinto de $f(3)$, luego no es continua en el intervalo $[1, 3]$. □

Ejemplo 3.2. La función $f(x)$ no es continua en el intervalo $[1, 3]$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 3 \\ \ln(x - 3) & 3 < x \end{cases}$$

Solución: En $x = 3$, los límites laterales son

$$\lim_{x \to 3^-} x + 1 = 4 \qquad \lim_{x \to 3^+} \ln(x - 3) = +\infty$$

distintos, luego no es continua en el intervalo $[1, 3]$. □

Test. Responde a las siguientes preguntas.

1. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $(0, 1)$

(a) Si (b) No

2. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $[0, 1)$

(a) Si (b) No

3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en todo intervalo que no contenga al 0.

(a) Si (b) No

4. La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, 10]$

(a) Si (b) No

5. Si $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ es continua en $[1, 5]$, si

(a) $a \notin [1, 5]$ (b) $a \in [1, 5]$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ es continua en todo intervalo $[a, b]$

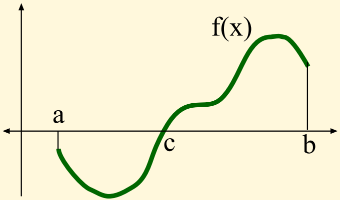
(a) Si (b) No

3.2. Teorema de Bolzano

Teorema 3.1. (Teorema de Bolzano) Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de distinto signo. Entonces existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b) \text{ con } f(c) = 0 \qquad (2)$$

Recuerda que al número c que verifica $f(c) = 0$ se le llama cero, o raíz de la función f y gráficamente representan los puntos de corte de la función con el eje OX.



Ejemplo 3.3. Demostrar por Bolzano que la ecuación

$$x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$$

tiene una solución en $(0, 1)$.

Solución: Sea

$$f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$$

se tiene que f es continua (por ser polinomio) en $[0,1]$. Como

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = -4$$

la función cambia de signo y existirá al menos un número $c \in (0,1)$ con $f(c) = 0$. es decir la función tiene al menos una raíz entre 0 y 1. $\square$

Ejercicio 6. ¿Por qué no es suficiente en el teorema que la función f sea continua en (a,b)? Razonar la respuesta.

Ejercicio 7. Demostrar que la ecuación

$$x^3 + x - 5 = 0$$

tiene al menos una solución $x = c$ tal que $1 < c < 2$.

Ejercicio 8. Para la función

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

utilizando el teorema de Bolzano en $[0,1]$, ¿podemos afirmar que existe $c \in (0,1)$ verificando que $f(c) = 0$? Calcular el valor de $c \in (0,1)$ que verifica $f(c) = 0$ y razonar por qué esto no contradice el teorema.

Ejercicio 9. Comprobar que la ecuación

$$x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

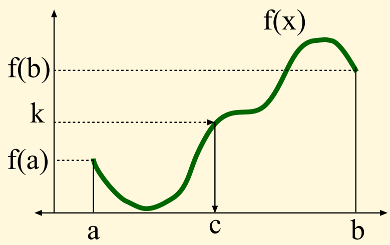
posee alguna solución real en $[0,\pi]$.

3.3. Teorema de los valores intermedios

Teorema 3.2. (Teorema de los valores intermedios)

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a) < k < f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b) \text{ con } f(c) = k \tag{3}$$

El teorema afirma que si $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a,b]$, siendo k un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un valor $c \in (a,b)$ con $f(c) = k$.



Ejercicio 10. Demostrar que la función $f(x) = x^2 + x - 1$ toma el valor $f(c) = 11$ con $c \in (0,5)$.

Ejercicio 11. Demostrar que la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ toma el valor $f(c) = 500$ con $c \in (0'001, 0'1)$.

3.4. Teorema de los Valores Extremos

Teorema 3.3. (Teorema de los Valores Extremos)

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $I = [a, b]$. Entonces

1. Existe un punto $x_{min} \in I$ que es un mínimo absoluto para f.
2. Existe un punto $x_{max} \in I$ que es un máximo absoluto para f.

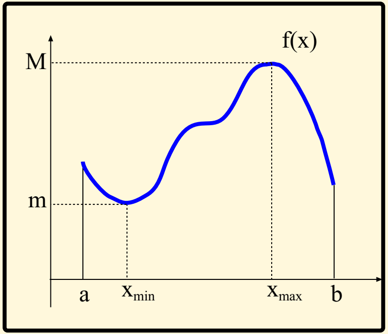
El teorema asegura que la función alcanza un máximo M y un mínimo m

$$m \leq f(x) \leq M \quad x \in [a, b]$$

que son alcanzados por dos puntos

$$x_{min} \in [a, b] \qquad x_{max} \in [a, b]$$

$$f(x_{min}) = m$$
$$f(x_{max}) = M$$



4. Ejercicios de repaso

Ejercicio 12. Calcular el valor de a y b para que la función sea continua para todo x

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a\,x - 6}{x - 2} & x < 2 \\ x^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$$

Ejercicio 13. Hallar a para que las funciones sean continuas en $x = 1$.

$a)$ $f(x) = \begin{cases} x + a & x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$

$b)$ $g(x) = \begin{cases} a^2\,x & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$

$c)$ $h(x) = \begin{cases} a\,x & x \leq 1 \\ x - a & 1 < x \end{cases}$

$d)$ $y(x) = \begin{cases} a^2\,x + 2 & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$

Ejercicio 14. Dada la función

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{s^2 - s}{s - 1} & s > 1 \\ \sqrt{1 - s} & s \leq 1 \end{cases}$$

¿es continua en $s = 1$?

Ejercicio 15. Hallar los puntos de discontinuidad de las funciones:

$a)$ $f(x) = |x - 3|$

$b)$ $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$

◀ Pulsa y elige el botón Funciones a Trozos y realiza la siguiente práctica con las funciones del ejercicio 13.

Práctica 4.1.

a) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x+a & x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<1 ? x+a:2` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón de los valores de a y observa que la función es continua cuando $a = 1$.

b) Sea la función: $g(x) = \begin{cases} a^2\,x & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<1 ? a^2*x:1` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón de los valores de a y observa que la función es continua cuando $a = \pm 1$.

c) Sea la función: $h(x) = \begin{cases} a\,x & x \leq 1 \\ x-a & 1 < x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<1 ? a*x:x-a` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón de los valores de a y observa que la función es continua cuando $a = 0{,}5$.

d) Sea la función: $y(x) = \begin{cases} a^2\,x+2 & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$. Para representarla introduce en $f(x)$ la expresión `x<0 ? a^2*x+2:1` y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón de los valores de a y observa que la función es discontinua para cualquier valor de a.

◀

Ejercicio 16. Calcular m y b para que la función sea continua en R

$$f(x) = \begin{cases} 4\operatorname{sen} x & x \leq -\dfrac{3\pi}{2} \\ m\operatorname{sen} x + b & -\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \\ 4\cos x & x \geq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 17. Hallar a y b para que $f(x)$ sea una función continua en $x = 0$ y $x = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^x} & x \leq 0 \\ a\,cos\,x + b & 0 < x \leq \pi \\ sen\,x - ax & x > \pi \end{cases}$$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$$

- $f(1) = k$
- $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = 1/2$

Para que sea continua, $\boxed{k = \dfrac{1}{2}}$.

Ejercicio 1

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 2. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x+h & x < -3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} & x > -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(-3^-) &= \lim_{x\to -3^-} 2x+h = h-6 \\ f(-3^+) &= \lim_{x\to -3^+} \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-x+6} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x^2-x+2)} = \\ &= \lim_{x\to -3^+} \frac{(x-3)}{(x^2-x+2)} = \frac{-6}{14} \end{aligned}$$

Para que exista $\lim_{x\to -3} f(x)$, $h-6 = -\dfrac{6}{14} \Longrightarrow \boxed{h = \dfrac{78}{14}}$

Ejercicio 2

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 3. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{x+2} & x \leq 0 \\ x^2 + 2ax + a & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{ax}}{x+2} = \frac{1}{2} \\ f(0^+) &= \lim_{x \to 0^+} x^2 + 2ax + a = a \end{aligned}$$

Para que sea continua en $x = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4. Siendo

$$f(x) = x^2 \, sen \, \frac{1}{x}$$

f es continua en su dominio $Dom(f) = R - \{0\}$. El valor que debe asignarse a $f(0)$ es el límite.

$$\lim_{x \to 0} f(x) \quad = \quad \lim_{x \to 0} x^2 \, sen \, \frac{1}{x} \stackrel{(1)}{=} 0$$

(1) se ha obtenido teniendo en cuenta que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 \text{ es infinitésimo}$$

$$\left| \text{sen} \, \frac{1}{x} \right| \leq 1 \; x \neq 0 \Longrightarrow \; \text{acotada}$$

y que infinitésimo $\times$ acotada $=$ infinitésimo. Ejercicio 4

Ejercicio 5. Siendo

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(1+x)}{x^2+ax+2a}$$

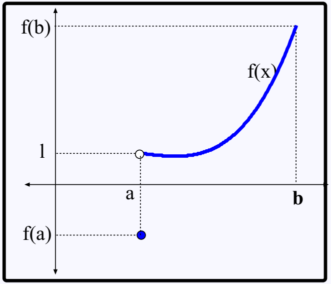
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}(1+x)}{x^2+ax+2a} = \frac{0}{1+a} \Longrightarrow a=-1 \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}(1+x)}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(1+x)}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 5

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6. Aunque se cumpla que $f(a)$ y $f(b)$ sean de signo contrario, la continuidad en el intervalo abierto (a, b) no garantiza que f corte al eje OX entre a y b pues puede ser discontinua en a o b. En el ejemplo gráfico se tiene que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l \neq f(a)$$



Ejercicio 6

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 7. Sea

$$f(x) = x^3 + x - 5$$

se tiene que f es continua (por ser polinomio) en $[1, 2]$. Como

$$f(1) = -3 \qquad f(2) = 5$$

la función cambia de signo y existirá al menos un número $c \in (1, 2)$ con $f(c) = 0$. es decir la función tiene al menos una raíz entre 1 y 2.

Ejercicio 7

Ejercicio 8. Sea

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

se tiene que f es continua (por ser polinomio) en $[0, 1]$. Como

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = 5$$

la función no cambia de signo no podemos aplicar el teorema en $[0, 1]$. Si resolvemos la ecuación de segundo grado se tiene

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \in (0, 1)$$

luego existe $c \in (0, 1)$ con $f(c) = 0$. es decir la función tiene una raíz entre 0 y 1. Ejercicio 8

Ejercicio 9. Sea

$$f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$$

se tiene que f es continua (por ser suma de funciones continuas) en $[0, \pi]$. Como

$$\begin{aligned} f(0) &= (0)^2 - (0)\operatorname{sen}(0) - \cos(0) = -1 < 0 \\ f(\pi) &= (\pi)^2 - \pi \operatorname{sen} \pi - \cos \pi = \pi^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

la función cambia de signo y existirá al menos un número $c \in (0, \pi)$ con $f(c) = 0$, es decir la función tiene al menos una raíz entre 0 y π.

Ejercicio 9

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 3.2. La demostración se obtiene definiendo la función

$$g(x) = f(x) - k$$

y aplicando el teorema de Bolzano en el intervalo $[a, b]$. En efecto, la función $g(x)$ es continua por ser diferencia de funciones continuas en $[a, b]$. Por otra parte $g(x)$ cambia de signo en $[a, b]$

$$g(a) = f(a) - k < 0 \qquad g(b) = f(b) - k > 0$$

luego por Bolzano

$$\exists c \in (a, b) \quad g(c) = 0 = f(c) - k$$

y de aquí

$$\exists c \in (a, b) \quad f(c) = k$$

◀

Ejercicio 10. Sea $f(x) = x^2 + x - 1$ se tiene que f es continua (por ser polinomio) en $[0, 5]$. Como

$$f(0) = -1 < 11 < f(5) = 29$$

existirá al menos un número $c \in (0, 5)$ con $f(c) = 11$. En este caso el valor de c se puede hallar, pues la ecuación resulta

$$x^2 + x - 1 = 11 \Longrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Longrightarrow x = -4, \boxed{3}$$

Ejercicio 10

Ejercicio 11. Se tiene que

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es continua en $[0'001, 0'1]$, pues $Dom(f) = R - \{0\}$. Como

$$f(0'1) = 10 < 500 < f(0'001) = 1000$$

existirá al menos un número $c \in (0'001, 0'1)$ con $f(c) = 500$. En este caso el valor de c es obviamente

$$\frac{1}{c} = 500 \Longrightarrow \boxed{c = 0'002}$$

Ejercicio 11

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 12. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a\,x - 6}{x - 2} & x < 2 \\ x^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(2^-) &= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - a\,x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-2a - 2}{0} \Longrightarrow \boxed{a = -1} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{x - 2} = 5 \\ f(2^+) &= \lim_{x \to 2^+} x^2 + b = 4 + b \end{aligned}$$

Para que sea continua en $x = 2$, $5 = 4 + b \Longrightarrow \boxed{b = 1}$ Ejercicio 12

Ejercicio 13.

a) Para que $f(x) = \begin{cases} x+a & x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$ sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = 1 + a = f(1^+) = 2 \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

b) Para que $g(x) = \begin{cases} a^2\, x & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$ sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = a^2 = f(1^+) = 1 \Longrightarrow \boxed{a = \pm 1}$$

c) Para que $h(x) = \begin{cases} a\, x & x \leq 1 \\ x - a & 1 < x \end{cases}$ sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = a = f(1^+) = 1 - a \Longrightarrow \boxed{a = 1/2}$$

d) Para que $y(x) = \begin{cases} a^2\, x + 2 & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$ sea continua en $x = 1$

$$f(1^-) = a^2 + 2 = f(1^+) = 1 \Longrightarrow a^2 = -1$$

no existe ningún valor de a que haga continua la función.

Ejercicio 13

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
CONTINUIDAD
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 14. Siendo

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{s^2 - s}{s - 1} & s > 1 \\ \sqrt{1 - s} & s \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(1^+) &= \lim_{s \to 1^+} \frac{s^2 - s}{s - 1} = \lim_{s \to 1^+} \frac{s(s-1)}{s - 1} = 1 \\ g(1^-) &= \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - s} = 0 \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} g(s) \neq \lim_{x \to 1^+} g(s)$, la función no es continua en $s = 1$.

Ejercicio 14

Ejercicio 15.

a) Si una función f es continua entonces $|f|$ también es continua. Luego $f(x) = |x-3|$ es continua en todo $x \in R$.

b) Siendo

$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$$

Como $Dom(f) = R - \{1\}$, la función es discontinua en $x = 1$. Como

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = 5$$

presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$.

Ejercicio 15

Ejercicio 16. Siendo $f(x) = \begin{cases} 4\,sen\,x & x \leq -\dfrac{3\pi}{2} \\ m\,sen\,x + b & -\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \\ 4\cos x & x \geq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f(-\dfrac{3\pi}{2}^{-}) = \lim\limits_{x \to -\frac{3\pi}{2}^{-}} 4\operatorname{sen} x = 4 \\ f(-\dfrac{3\pi}{2}^{+}) = \lim\limits_{x \to -\frac{3\pi}{2}^{+}} m\operatorname{sen} x + b = m + b \end{array}\right\} \Longrightarrow m + b = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\dfrac{3\pi}{2}^{-}) = \lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^{-}} m\operatorname{sen} x + b = -m + b \\ f(\dfrac{3\pi}{2}^{+}) = \lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^{+}} 4\cos x = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -m + b = 0$$

$$m = 2 \quad b = 2$$

Ejercicio 16

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 17. Siendo $f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{1}{e^x} & x \leq 0 \\ a\,cos\,x + b & 0 < x \leq \pi \\ sen\,x - ax & x > \pi \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^x} = 1 \\ f(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} a\,cos\,x + b = a + b \\ f(\pi^-) &= \lim_{x\to \pi^-} a\ \cos\ x + b = -a + b \\ f(\pi^+) &= \lim_{x\to \pi^+} \operatorname{sen}\ x - ax = -a\pi \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a + b = 1 \\ -a + b = -a\pi \end{array} \right. \quad a = -\frac{1}{\pi - 2} \quad b = \frac{\pi - 1}{\pi - 2}$$

Ejercicio 17

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Como el dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ es $Dom(f) = R - \{a\}$, la función es continua en todo intervalo que no contenga a $x = a$.

Final del Test

Índice alfabético